

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
природоподобных, плазменных и  
ядерных технологий им. И.В.**

**Курчатова**

**Т.Е. Григорьев**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Дифференциальные уравнения
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Экзамен

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 180 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 360, всего зач. ед.: 8

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.И. Аллилуева, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 29.03.2024

## Аннотация

В курсе «Дифференциальные уравнения» студенты изучают основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и приобретают практические навыки аналитического решения различных классов уравнений. Излагаются основные теоремы общей теории дифференциальных уравнений и методы, лежащие в их основе. Подробно изучаются, как с теоретической, так и с практической точек зрения, линейные уравнения и системы с постоянными, переменными и периодическими коэффициентами. Значительная часть курса посвящена локальной теории нелинейных уравнений и методам теории возмущения: устойчивость положений равновесия и поведение фазовых траекторий в их окрестностях, нормальные формы, устойчивость и теория возмущений периодических решений, теория усреднения и т. д. Изложены основы качественной теории дифференциальных уравнений и элементы вариационного исчисления. Изучаются многочисленные примеры дифференциальных уравнений, имеющих прикладное значение: параметрический резонанс, уравнение Шредингера, уравнения, описывающие колебания в электрических цепях, динамические системы из экологии.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- освоение студентами фундаментальных знаний в области обыкновенных дифференциальных уравнений, изучение способов исследования и решения дифференциальных уравнений, а также их практического применения.

### Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области дифференциальных уравнений как дисциплины, обеспечивающей научные основы современных моделей окружающего мира и технологических процессов;
- обучение студентов методам решения дифференциальных уравнений и выявления их особенностей и специфических свойств;
- формирование подходов к выполнению студентами исследований в области дифференциальных уравнений в рамках выпускных работ на степень бакалавра.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

уметь:

- применять на практике методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

владеть:

- методологией и навыками решения научных и практических задач.

## 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дифференциальные уравнения первого порядка.	8	8		30
2	Линейные уравнения и системы.	12	12		30
3	Общая теория дифференциальных уравнений.	10	10		30
4	Динамические системы и теория устойчивости.	12	12		30
5	Линейные уравнения с переменными коэффициентами.	10	10		30
6	Элементы вариационного исчисления.	8	8		30
Итого часов		60	60		180
Подготовка к экзамену		60 час.			
Общая трудоёмкость		360 час., 8 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

##### 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы первого порядка. Понятие решения. Уравнения с разделяющимися переменными. Теоремы существования и единственности решения для уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующие множители. Однородные и квазиоднородные уравнения. Уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения, допускающие понижение порядка

##### 2. Линейные уравнения и системы.

Экспонента линейного оператора. Определитель экспоненты. Экспонента жордановой клетки. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Фундаментальная система решений. Характеристическое уравнение. Разложение фазового пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Общее решение. Линейное однородное уравнение  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами: пространство решений, характеристическое уравнение, общее решение. Классификация особых точек линейных систем на плоскости и их фазовые портреты. Линейные неоднородные системы уравнений с постоянными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, частное решение системы с правой частью в виде квазимногочлена. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, частное решение уравнения с правой частью в виде квазимногочлена. Пространство решений линейной однородной системы. Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица, определитель Вронского, формула Лиувилля–Остроградского. Линейные неоднородные системы уравнений с переменными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных. Линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами: общие свойства, пространство решений, линейная независимость и зависимость решений, фундаментальная система решений, определитель Вронского, формула Лиувилля–Остроградского. Линейное неоднородное уравнение  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, формула Коши для общего решения.

### 3. Общая теория дифференциальных уравнений.

Уравнения и системы порядка выше первого и их сведение к системам первого порядка. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Теоремы о продолжении и непрерывной зависимости решений от начального условия. Максимальный интервал существования. Автономные и неавтономные уравнения. Динамические системы. Геометрические понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Фазовое пространство и расширенное фазовое пространство. Поле направлений, интегральные кривые. Векторное поле, фазовые кривые. Фазовый портрет, положения равновесия, предельные циклы. Преобразование сдвига вдоль решений автономной и неавтономной системы. Фазовый поток автономной системы.

## Семестр: 4 (Весенний)

### 4. Динамические системы и теория устойчивости.

Первые интегралы автономных и неавтономных систем. Уравнение в вариациях и теорема о гладкой зависимости решения от параметров и начальных условий. Теоремы о выпрямлении поля направлений и векторного поля.

Локальные теоремы о первых интегралах. Понятие интегрируемости в квадратурах. Теория Пуанкаре–Бендиксона. Устойчивость по Ляпунову. Основные определения: устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость. Устойчивость линейных однородных систем: основные определения. Устойчивость систем с постоянными и периодическими коэффициентами. Устойчивость и сильная устойчивость линейных гамильтоновых систем с постоянными коэффициентами. Расположение и структура множества собственных чисел. Устойчивость и сильная устойчивость линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Расположение и структура множества мультипликаторов. Параметрический резонанс. Характеристические показатели Ляпунова. Спектр Ляпунова линейной системы с непрерывной ограниченной матрицей. Функции Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Функция Четаева. Теорема Четаева о неустойчивости. Теорема об исследовании равновесия на асимптотическую устойчивость по линейному приближению.

### 5. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Линейное однородное уравнение 2-ого порядка с переменными коэффициентами: теорема Штурма о перемежаемости нулей решений. Теорема сравнения Штурма, теорема Кнезера. Задача Штурма–Лиувилля, существование бесконечной последовательности собственных чисел. Линейные однородные системы уравнений с периодическими коэффициентами. Оператор монодромии. Мультипликаторы. Теория Флоке–Ляпунова: общий вид фундаментальной матрицы линейной периодической системы, приводимость к системе с постоянными коэффициентами.

#### 6. Элементы вариационного исчисления.

Основные понятия. простейшая задача вариационного исчисления. Задача о брахистохроне. Задача со свободными концами. задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Изопериметрическая задача.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором и экраном.

### 6.Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2012 .— 344 с.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Л. С. Понтрягин .— 6-е изд. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 1982, 2001 .— 400 с.
3. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. Ф. Филиппов .— 6-е изд. — М. : ЛЕНАНД, 2015 .— 242 с
4. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : [учебник для вузов] / И. Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 208 с.

Фонд литературы кафедры

5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

#### Дополнительная литература

1. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука, 1978 .— 304 с.
2. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
3. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. Э. Эльсгольц .— 2-е изд., стереотип. — М. : Наука, 1969 .— 424 с.

Фонд литературы кафедры

4. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. — Гостехиздат. 1955.

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru>— электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.Sci-lib.com> — Большая научная библиотека.
3. <http://physics.nglib.ru/catalog.jsp?rubric=14>— литература по физике в электронной Библиотеке Технической Литературы «Нефть и Газ».
4. <http://arXiv.org>— CornellUniversityLibrary – Библиотека Корнельского Университета, электронный ресурс arXiv.

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются персональные компьютеры с доступом в интернет.  
Microsoft Office, Adobe Rider,

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, входящих в четыре контрольные работы. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к промежуточным тестированиям, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала. Студенты, успешно прошедшие все формы промежуточного контроля, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
3 (осенний) - Экзамен	
4 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.И. Аллилуева, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» обучающийся должен:

**знать:**

- методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

**уметь:**

- применять на практике методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

**владеть:**

- методологией и навыками решения научных и практических задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.



### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Дифференциальные уравнения» осуществляется в форме экзамена в 3 и 4 семестрах. Экзамен проводится в устной форме.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 3 семестре:**

1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Уравнение с разделяющимися переменными. Доказать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными.
2. Интегральные кривые дифференциальной 1-формы. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
3. Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной.
4. Системы дифференциальных уравнений. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Интегральное уравнение, метод последовательных приближений. Принцип сжатых отображений.
5. Понятие продолжения решений, непродолжаемого решения. Теорема о продолжении решений до границы с компактом, ее следствия. Примеры решений, непродолжаемых неограниченно по времени.
6. Непрерывная зависимость решения от начального условия.
7. Системы линейных дифференциальных уравнений. Существование, единственность, продолжение решений.
8. Однородная система линейных дифференциальных уравнений. Линейное пространство решений, фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его связь линейной зависимостью. Формула Лиувилля-Остроградского.
9. Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений. Общее решение, метод вариации постоянной.
10. Однородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Линейное пространство решений, фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его связь линейной зависимостью. Формула Лиувилля-Остроградского.
11. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Общее решение, метод вариации постоянной.
12. Норма оператора и ее свойства. Функциональный операторнозначный ряд, мажоранта. Теорема Вейерштрасса о мажорируемой сходимости. Производная операторнозначной функции. Теорема о почленном дифференцировании ряда.
13. Понятие экспоненты оператора. Ее свойства. Примеры вычисления экспоненты: жорданова клетка, диагональная матрица. Решение задачи Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
14. Разложение  $R_n$  в прямую сумму инвариантных подпространств оператора  $e^{tA}$ . Вид решения в случае простых и кратных вещественных корней.
15. Комплексификация линейной однородной системы. Вид решения в случае простых и кратных комплексных корней.
16. Следствия для линейных уравнений  $n$ -го порядка. Характеристическое уравнение. Жорданова форма в случае кратных корней характеристического многочлена. Малые колебания.
17. Нахождение частного решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. Следствие для уравнений  $n$ -го порядка.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 4 семестре:**

1. Автономные системы. Фазовое пространство. Расширенное фазовое пространство. Фазовые и интегральные кривые. Фазовый портрет консервативной механической системы.
2. Дифференциальное уравнение как векторное поле. Фазовый поток. Теорема о выпрямлении (без доказательства).
3. Особые точки векторного поля. Особые точки линейного векторного поля на плоскости. Фазовые кривые нелинейных систем в окрестности особой точки.
4. Теорема о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от параметра. Связь с гладкой зависимостью от начальных условий.
5. Теорема о выпрямлении поля направлений и векторного поля.
6. Уравнение в вариациях. Элементы теории возмущений.
7. Производная вдоль векторного поля. Первый интеграл. Теорема о локальных первых интегралах.
8. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Устойчивость нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.
9. Функция Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Лагранжа об устойчивом равновесии.
10. Теорема Четаева. Теорема Ляпунова о неустойчивости.
11. Функция Ляпунова для линейной системы. Устойчивость по первому приближению.
12. Теория Флоке. Фундаментальная матрица, матрица монодромии. Основная теорема. Мультипликаторы, характеристические показатели. Представление Флоке. Существование периодических решений линейной системы с периодическими коэффициентами.
13. Параметрический резонанс. Зоны неустойчивости в случае кусочно-постоянного периодического возмущения.
14. Устойчивость положения равновесия линейной системы с периодическими коэффициентами. Устойчивость периодических решений нелинейных систем.
15. Теоремы разделения и сравнения Штурма. Оценка числа нулей решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Теорема Кнезера об осциллирующих уравнениях.
16. Задача Штурма-Лиувилля.
17. Функция Грина. Ее существование и единственность. Решение краевой задачи для линейного неоднородного уравнения.
18. Слабый и сильный экстремум функционала. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума.
19. Простейшая задача вариационного исчисления. Вид вариации функционала. Уравнение Эйлера.
20. Условный экстремум функционала. Изопериметрические задачи.

### **3.1. Примеры экзаменационных билетов**

#### **Билет №1**

1. Дифференциальное уравнение как векторное поле. Фазовый поток. Теорема о выпрямлении (без доказательства).
2. Задача Штурма-Лиувилля
3. Теорема Четаева. Теорема Ляпунова о неустойчивости.

#### **Билет №2**

1. Теорема о выпрямлении поля направлений и векторного поля.
2. Производная вдоль векторного поля. Первый интеграл. Теорема о локальных первых интегралах.

### 3. Условный экстремум функционала. Изопериметрические задачи.

#### 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и

		может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.